

Linéarisation d'endomorphismes holomorphes de \mathbf{P}^k et caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure de Green

F. Berteloot et C. Dupont

1 Introduction et résultats

Les propriétés dynamiques d'un endomorphisme f , holomorphe et de degré algébrique $d \geq 2$ sur l'espace projectif complexe \mathbf{P}^k , se reflètent sur son courant et sa mesure de Green. Ce sont respectivement un $(1, 1)$ -courant positif fermé T obtenu comme limite de $\frac{1}{d^n} f^{n*} \omega$ où ω désigne la forme de Fubini-Study et une mesure de probabilité invariante μ obtenue comme k -ième puissance extérieure de T . Ces objets, introduits par Hubbard-Papadopol [12] et Fornaess-Sibony [9] possèdent de remarquables propriétés ergodiques. Fornaess et Sibony ont montré que la mesure de Green est mélangeante [10], elle est aussi l'unique mesure d'entropie maximale et ses exposants de Liapounov sont supérieurs à $\frac{1}{2} \log d$ comme l'ont montré Briend et Duval [3], [4].

La dimension de Hausdorff de μ ($Dim_H \mu$), définie comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des ensembles de μ -mesure pleine, est une caractéristique géométrique importante du système dynamique $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$. L'une des premières questions concernant l'estimation de cette dimension est de déterminer les systèmes pour lesquels elle est maximale.

En dimension $k = 1$, Ledrappier a montré que la maximalité de $Dim_H \mu$ équivaut à l'absolue continuité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue [14]. Un argument de renormalisation montre alors que l'endomorphisme f est un exemple de Lattès, il s'agit d'un cas particulier d'un résultat de Mayer [15]. Notons aussi le résultat très précis de Zdunik [17] qui stipule que la dimension de Hausdorff de μ coïncide avec celle de son support (l'ensemble de Julia de f) si et seulement si f est un exemple de Lattès, un polynôme de Tchebychev ou une puissance $z^{\pm d}$.

En dimension supérieure, il est possible d'adapter le travail de Ledrappier selon lequel, pour toute mesure invariante par f , l'égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle force l'absolue continuité. Ceci fait l'objet de [8] et concerne en particulier les mesures de Green d'exposants de Liapounov minimaux. Par ailleurs, la maximalité de $Dim_H \mu$ entraîne la minimalité des exposants, comme l'ont implicitement établi Binder et DeMarco [2] (voir aussi l'appendice). Ainsi, une caractérisation précise des endomor-

phismes dont la mesure est absolument continue montrerait que, pour un système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ générique, l'un au moins des exposants de Liapounov de μ est strictement supérieur à $\frac{1}{2} \log d$ et $\dim_H \mu$ est strictement inférieure à $2k$. En outre ceci répondrait à une question posée par Fornaess et Sibony dans [11]. Le principal résultat de cet article fournit une telle caractérisation :

Théorème 1 *Pour tout système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$, la mesure de Green μ est non singulière par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si f est un endomorphisme de Lattès : il existe alors un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^k & \xrightarrow{D} & \mathbf{C}^k \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbf{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^k \end{array}$$

où D est une application affine de partie linéaire $\sqrt{d} U$ (U unitaire) et σ un revêtement ramifié sur les fibres duquel un groupe cristallographique complexe agit transitivement.

Il est crucial, dans notre contexte, que la mesure de Green provienne d'un courant ($\mu = T^k$) car l'invariance du courant de Green ($f^*T = dT$) recèle plus d'informations géométriques que celle de la mesure. En particulier, il a été démontré dans [1] que f est un endomorphisme de Lattès dès que son courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert de \mathbf{P}^k . La preuve du théorème 1 revient donc à déduire la régularité de T de celle de μ . Nous utiliserons pour cela des arguments de renormalisation qui nécessitent de linéariser la suite $(f^n)_n$ le long d'orbites typiques.

La mise au point d'un tel procédé de linéarisation occupe la section 3. Il s'agit, pour des choix μ -génériques de x , de rendre la suite $(f^n)_n$ normale en x en la précomposant par des contractions équivalentes aux applications linéaires tangentes inverses $(\tau_x \circ (d_0 f_x^n)^{-1})$. A cet effet, nous estimons précisément les erreurs cumulées lorsque l'on remplace f par sa différentielle le long d'une orbite (cf. Proposition 2). Outre la stricte positivité des exposants de Liapounov $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ du système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$, ceci requiert l'hypothèse $\lambda_k < 2\lambda_1$. Une fois acquise la possibilité de linéariser, nous majorons la norme des différentielles $(d_0 f_x^n)^{-1}$ en reprenant, dans ce contexte, la méthode pluripotentialiste de Briend et Duval. Nous obtenons finalement une minoration de la masse des points x où $(f^n)_n$ est linéarisable et les normes $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\|$ convenablement majorées :

Théorème 2 *Soit $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ un système tel que $\lambda_k < 2\lambda_1$. Pour $\tau > 0$, $\rho \in]0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}$, soit $\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)$ l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^k$ tels que $f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1}$ soit injective de $B(0, \rho)$ dans $B(0, R_0)$ et $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \leq \tau d^{-\frac{n}{2}}$. Alors il existe $\alpha :]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$ et $C > 0$ ne dépendants que de f tels que $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 1$ et $\liminf_n \mu[\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)] \geq \alpha(\rho) - \frac{C}{\tau^2 \rho^2}$.*

Il est facile de d'établir une version plus maniable du théorème 2. En outre, grâce à la propriété de mélange, on peut assujettir une sous-suite de l'orbite $(f^n(x))_n$ à ne pas s'échapper d'un borélien prescrit :

Théorème 3 *Si les exposants de Liapounov de $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ sont tels que $\lambda_k < 2\lambda_1$, alors pour tout borélien B chargé par μ , on peut trouver $\tilde{B} \subset B$ de masse arbitrairement proche de $\mu(B)^2$ et $\tau_0 > 0$ tels que pour tout point $x \in \tilde{B}$ il existe une suite extraite $(f^{n_j})_j$ ainsi qu'un réel $\nu(x) > 0$ vérifiant :*

- 1) $f^{n_j}(x) \in B$ pour tout $j \in \mathbf{N}$
- 2) $f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}$ converge uniformément vers un biholomorphisme sur $B(0, \nu(x))$
- 3) $\|(d_0 f_x^{n_j})^{-1}\| \leq \tau_0 d^{-\frac{n_j}{2}}$.

La section 4 concerne la preuve du théorème 1 proprement dite. La régularité de T se déduit, par des arguments de renormalisation, des relations $f^{n*}T = d^n T$ pourvu que la suite $(f^n)_n$ soit assimilable à une suite d'homothéties $(d^{-\frac{n}{2}} Id)_n$ (cf. Lemme 3). Il s'agit donc de s'assurer que, lorsque μ est absolument continue, les différentielles $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$ intervenant dans le théorème 3 sont équivalentes à des homothéties de rapport $d^{-\frac{n_j}{2}}$. En d'autres termes, il faut contrôler les distorsions des ellipsoïdes $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}[B(0, 1)]$. Or, d'après la dernière assertion du théorème 3 la taille de ces ellipsoïdes est au plus de l'ordre de $d^{-\frac{n_j}{2}}$ et il convient donc d'en minorer convenablement le volume. Ceci résulte de l'absolue continuité de μ et des relations $f^{n*}\mu = d^{kn}\mu$ (cf. Proposition 3).

Signalons pour finir que les exemples de Lattès interviennent naturellement dans d'autres problèmes (voir par exemple [7] et [5]).

2 Préliminaires.

Dans cette section, nous résumons les principaux outils et résultats utilisés dans la suite et fixons quelques notations.

- L'espace projectif complexe \mathbf{P}^k est muni d'une structure de variété hermitienne induite par la forme de Fubini-Study ω . On construit une famille de cartes holomorphes $(\tau_x)_{x \in \mathbf{P}^k}$ telle que :

1. $\tau_x : \mathbf{C}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$ est un biholomorphisme sur son image et $\tau_x(0) = x$
2. $(\tau_x^* \omega)_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1, k} dz_j \wedge d\bar{z}_j$

Cette famille est obtenue en explicitant une telle carte pour un point base $x_0 \in \mathbf{P}^k$ puis en la propageant à \mathbf{P}^k par l'action transitive de $\mathbf{U}_{k+1}(\mathbf{C})$. Ce faisant, on obtient plutôt une classe de cartes en x car τ_x est définie à un élément du sous-groupe d'isotropie de x_0 près. Cette ambiguïté pourra cependant être ignorée puisque $\mathbf{U}_{k+1}(\mathbf{C})$ est compact ; les affirmations faisant intervenir τ_x devront être comprises comme valables pour tous les éléments de la classe de cartes en x .

On peut aussi, localement, faire un choix différentiable de τ_x et en particulier s'assurer de la propriété suivante :

3. $\tau_{x_0}^{-1} \circ \tau_x - \tau_{x_0}^{-1}(x)$ converge vers l'identité en topologie \mathcal{C}^∞ lorsque $x \rightarrow x_0$.

- L'extension naturelle $(\widehat{\mathbf{P}^k}, \hat{f}, \hat{\mu})$ est un système dynamique inversible associé au système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ de la façon suivante :

$\widehat{\mathbf{P}^k} := \{\hat{x} := (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} / f(x_n) = x_{n+1}\}$ est muni de la topologie et de la tribu produit.

On note $\pi_0 : \widehat{\mathbf{P}^k} \rightarrow \mathbf{P}^k$ la projection définie par $\pi_0(\hat{x}) = x_0$ de sorte que $\pi_0 \circ f = \hat{f} \circ \pi_0$ où \hat{f} désigne le décalage à droite sur $\widehat{\mathbf{P}^k}$. La mesure $\hat{\mu}$ est l'unique mesure de probabilité invariante par \hat{f} sur $\widehat{\mathbf{P}^k}$ telle que $\pi_{0*}\hat{\mu} = \mu$. Elle hérite de μ le caractère mélangeant.

On notera \hat{f}^{-n} le décalage à gauche itéré n fois.

Soit \mathcal{C}_f l'ensemble des points critiques de f , on considère alors

$$\widehat{X} := \{\hat{x} \in \widehat{\mathbf{P}^k} / x_n \notin \mathcal{C}_f, \forall n \in \mathbf{Z}\}$$

cet ensemble est de $\hat{\mu}$ -mesure pleine car μ ne charge pas les ensembles pluripolaires (voir [16] Proposition A.6.3).

- Nous noterons $B(0, R)$ (resp. $P(0, R)$) la boule euclidienne centrée en 0 et de rayon R (resp. le polydisque centré en 0 et de polyrayon R) de \mathbf{C}^k . Nous noterons $B(x, s)$ l'image de $B(0, s)$ par τ_x

- A tout endomorphisme holomorphe f sur \mathbf{P}^k et tout $x \in \mathbf{P}^k$ on associe les applications suivantes. Elles sont définies sur un voisinage de l'origine de \mathbf{C}^k dont la taille dépend de x et n :

$$f_x := \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$$

$$f_x^n = \tau_{f^n(x)}^{-1} \circ f^n \circ \tau_x = f_{f^n(x)} \circ \dots \circ f_x$$

Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}$ on définit une application $f_{\hat{x}}^{-n}$ par :

$$f_{\hat{x}}^{-n} := f_{x_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_{-1}}^{-1}$$

$f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur un voisinage de l'origine dont la taille dépend mesurablement de \hat{x} (voir le lemme ci-dessous).

- Nous notons $T = T_a + T_s$ la décomposition de Lebesgue d'un $(1, 1)$ -courant positif T . Cette décomposition est unique et les courants T_a, T_s sont positifs. Par contre la fermeture de T n'implique pas celle de T_a (ou T_s).

Nous noterons σ_T la mesure trace du courant T . On observe que la décomposition de Lebesgue de σ_T est donnée par $\sigma_T = \sigma_{T_a} + \sigma_{T_s}$.

- Nous utiliserons le résultat de Briend et Duval sur la minoration optimale des exposants de Liapounov :

Théorème (Briend-Duval) *Les exposants de Liapounov du système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ sont supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2} \text{Log } d$.*

ainsi que des propriétés des branches inverses de f , mises en évidence dans leur démonstration et qui, compte tenu de la stricte positivité des exposants peuvent s'exprimer ainsi (cf. [3] ou [6]) :

Lemme 1 *Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ les exposants de Liapounov du système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$. Soient $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \ll 1$ et $0 < r_0 \leq R_0 \ll 1$. Il existe des fonctions ρ, r continues sur \mathbf{P}^k et strictement positives hors de \mathcal{C}_f ainsi que des fonctions mesurables $\eta : \hat{Y} \rightarrow]0, r_0]$, $C : \hat{Y} \rightarrow [1, +\infty[$ définies sur un ensemble de $\hat{\mu}$ -mesure pleine \hat{Y} telles que :*

1. f_x est injective sur $B(0, \rho(x))$ et $B(0, r(x)) \subset f_x[B(0, \rho(x))]$, $\forall x \in \mathbf{P}^k \setminus \mathcal{C}_f$
2. $\lim_n \frac{1}{n} \text{Log } \rho(x_n) = 0$, $\forall \hat{x} \in \hat{Y}$
3. $f_{\hat{x}}^{-n}$ est injective sur $B(0, \eta(\hat{x}))$ pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}$ et tout n , de plus :

$$d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \gamma \eta(\hat{x}))] \subset B(0, \gamma r(x_{-(n+1)})e^{-n(\lambda_1 - \epsilon)})$$

pour tout $0 < \gamma < 1$

4. $\text{Lip } f_{\hat{x}}^{-n} \leq C(\hat{x})e^{-n(\lambda_1 - \frac{\epsilon}{2})}$ sur $B(0, \eta(\hat{x}))$.

3 Un procédé de linéarisation.

Dans toute cette partie nous considérons le système dynamique $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ et adoptons la définition suivante.

Définition 1 *La suite des itérées $(f^n)_n$ est linéarisable en $x \in \mathbf{P}^k$ si et seulement si il existe $\nu(x) > 0$ tel qu'après une éventuelle extraction, la suite $[f^n \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^n)^{-1}]_n$ converge uniformément vers une limite injective sur $B(0, \nu(x))$.*

Nous commencerons par montrer que cette propriété est μ -générique dès que le spectre de Liapounov du système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ est assez étroit, cela correspond à la seconde assertion du théorème 3 lorsque le borélien B est pris égal à \mathbf{P}^k :

Théorème 4 *Si les exposants de Liapounov de $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ sont tels que $\lambda_k < 2\lambda_1$ alors $(f^n)_n$ est linéarisable en μ -presque tout point.*

Fixons $R_0 > 0$ puis, pour tout $\rho \in]0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$ définissons $\mathcal{B}_n(\rho)$ par :

$$\mathcal{B}_n(\rho) := \{x \in \mathbf{P}^k / f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1} \text{ injective de } B(0, \rho) \text{ dans } B(0, R_0)\}$$

Dans ce qui suit, on pourra diminuer R_0 sans affecter la validité des énoncés. La linéarisabilité en x résulte immédiatement, via le théorème de Montel, de l'appartenance de x à $\cup_{0 < \rho \leq 1} \mathcal{B}(\rho)$ où $\mathcal{B}(\rho) := \limsup_n \mathcal{B}_n(\rho)$. Ainsi, comme $\mu[\mathcal{B}(\rho)] \geq \limsup_n \mu[\mathcal{B}_n(\rho)]$, l'énoncé suivant est une version quantifiée du théorème 4 :

Proposition 1 *Si les exposants de Liapounov de $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ sont tels que $\lambda_k < 2\lambda_1$, alors il existe $\alpha :]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$ telle que $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 1$ et $\mu[\mathcal{B}_n(\rho)] \geq \alpha(\rho)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Pour établir la proposition 1, nous nous plaçons dans l'extension naturelle $\widehat{\mathbf{P}}^k$ et comparons les branches inverses de f à leurs différentielles le long d'orbites négatives génériques $\hat{x}_- := (x_{-j})_{j \geq 0}$. Plus précisément, l'invariance de $\hat{\mu}$ nous permettra de déduire la proposition 1 de la proposition technique suivante :

Proposition 2 *Sous les hypothèses du théorème 4, pour tout $r_0 \in]0, R_0]$ il existe des fonctions mesurables $\eta, S : \widehat{Z} \rightarrow]0, r_0]$ définies sur un ensemble \widehat{Z} de $\hat{\mu}$ -mesure pleine telles que $S \leq \eta$ et $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, S(\hat{x}))] \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}))]$ pour tout $\hat{x} \in \widehat{Z}$ et tout $n \in \mathbf{N}$.*

Voyons comment la proposition 1 se déduit de la proposition 2. Posons $\widehat{\mathcal{S}}(\rho) := \{\hat{x} \in \widehat{Z} / S(\hat{x}) \geq \rho\}$ où S désigne la fonction fournie par la proposition 2 et vérifions les inclusions suivantes :

$$\pi_0[\hat{f}^{-n}(\widehat{\mathcal{S}}(\rho))] \subset \mathcal{B}_n(\rho)$$

L'appartenance de $\hat{x}_n := \hat{f}^n(\hat{x})$ à $\widehat{\mathcal{S}}(\rho)$ signifie que :

$$d_0 f_{\hat{x}_n}^{-n}[B(0, \rho)] \subset d_0 f_{\hat{x}_n}^{-n}[B(0, S(\hat{x}_n))] \subset f_{\hat{x}_n}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}_n))]$$

Comme $f_{\hat{x}_n}^{-n}$ est injective sur $B(0, \eta(\hat{x}_n))$ d'inverse $f_{x_0}^n$, l'appartenance de x à $\mathcal{B}_n(\rho)$ s'obtient en composant les inclusions précédentes par $f_{x_0}^n$:

$$f_{x_0}^n \circ (d_0 f_{x_0}^n)^{-1}[B(0, \rho)] \subset B(0, \eta(\hat{x}_n)) \subset B(0, R_0)$$

Compte tenu de l'invariance de $\hat{\mu}$ on a $\mu[\mathcal{B}_n(\rho)] \geq \hat{\mu}[\hat{f}^{-n}(\widehat{\mathcal{S}}(\rho))] = \hat{\mu}[\widehat{\mathcal{S}}(\rho)] =: \alpha(\rho)$ et, comme S est $\hat{\mu}$ -presque partout strictement positive, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 1$. $\mathbf{\Lambda}$

La preuve de la proposition 2 consiste à compenser les erreurs dues à la substitution de $d_0 f_{x_j}^{-1}$ à $f_{x_j}^{-1}$ le long de \hat{x} en diminuant le rayon $\eta(\hat{x})$. Pour que les compensations, cumulées, fournissent un rayon $S(\hat{x}) > 0$, il faut que les erreurs soient négligeables devant la plus petite dimension caractéristique de l'ellipsoïde $d_0 f_{\hat{x}}^{-j}[B(0, 1)]$. Il résulte du lemme suivant que tel est le cas lorsque $\lambda_k < 2\lambda_1$.

Lemme 2 *Pour tout système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ et tout $0 < \epsilon \ll 1$, on peut trouver $\widehat{Z} \subset \widehat{\mathbf{P}}^k$ de $\hat{\mu}$ -mesure pleine et des fonctions mesurables $\eta, E, F : \widehat{Z} \rightarrow \mathbf{R}^{+*}$ telles que $0 < \eta \leq r_0 \leq R_0$ et :*

1) $\forall \hat{x} \in \widehat{Z}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall \gamma \in]0, 1], \forall u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \gamma \eta(\hat{x}))]$:

$$\|(d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{-1} - f_{x_{-(n+1)}}^{-1})(u)\| \leq \gamma E(\hat{x}) e^{-2n(\lambda_1 - \epsilon)}$$

2) $\forall \hat{x} \in \widehat{Z}, \forall n \in \mathbf{N} : \|d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1}\| \leq F(\hat{x}) e^{n(\lambda_k + \epsilon)}$

Preuve de la Proposition 2 :

Reprenons les notations du lemme 2 et définissons sur \widehat{Z} les fonctions mesurables suivantes :

$$\xi_n(\hat{x}) := \text{Sup}\{t \leq \eta(\hat{x})/d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, t)] \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}))]\}$$

$$n_0(\hat{x}) := \text{Min}\{p \geq 1/\forall n \geq p : \frac{EF}{\eta}(\hat{x}) \leq e^{n\epsilon}\}$$

$$s(\hat{x}) := \text{Min}\{\xi_n(\hat{x}) : 0 \leq n \leq n_0(\hat{x})\}$$

Posons $\kappa_j := 1 - e^{-j(2\lambda_1 - \lambda_k - 6\epsilon)}$ où ϵ est assez petit pour que $\prod_{j=1}^{\infty} \kappa_j =: \kappa > 0$ et définissons $s_n(\hat{x})$ par :

$$s_n(\hat{x}) := s(\hat{x}) \quad \text{si } n \leq n_0(\hat{x})$$

$$s_n(\hat{x}) := s(\hat{x}) \prod_{j=n_0(\hat{x})}^{n-1} \kappa_j \quad \text{si } n \geq n_0(\hat{x}) + 1$$

Pour montrer que la fonction $S(\hat{x}) := \kappa s(\hat{x})$ convient, il suffit alors d'établir les inclusions :

$$(I_n)_{n \geq 0} : d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n(\hat{x}))] \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}))]$$

Par définition de $s_n(\hat{x})$, les inclusions (I_n) sont satisfaites lorsque $n \leq n_0(\hat{x})$. Supposons (I_n) vraie pour $n \geq n_0(\hat{x})$ et posons $\nu_n := (\frac{E s_n}{\eta})(\hat{x}) e^{-2n(\lambda_1 - 2\epsilon)}$. On a alors :

$$(1) \quad s_{n+1} \leq s_n - \|(d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)})^{-1}\| \nu_n$$

En effet :

$$s_{n+1} = s_n \kappa_n = s_n (1 - e^{-n(2\lambda_1 - \lambda_k - 6\epsilon)}) \leq s_n (1 - \frac{EF}{\eta}(\hat{x}) e^{-n(2\lambda_1 - \lambda_k - 5\epsilon)})$$

$$\leq s_n - \|d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1}\| \nu_n = s_n - \|(d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)})^{-1}\| \nu_n$$

la première majoration résultant de la définition de $n_0(\hat{x})$ et la seconde de l'assertion (2) du lemme 2.

Désignons par Λ la frontière de $d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_n)]$, on vérifie alors aisément que l'inégalité (1) se traduit par

$$(2) \quad d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_{n+1})] \subset d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_n)] \setminus \bigcup_{p \in \Lambda} B(p, \nu_n)$$

Par ailleurs, la première assertion du lemme 2 (où l'on prend $\gamma = \frac{s_n}{\eta}$) stipule que $f_{x_{-(n+1)}}^{-1}$ diffère d'au plus ν_n de sa différentielle sur $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n)]$, il s'ensuit que

$$(3) \quad d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_n)] \setminus \bigcup_{p \in \Lambda} B(p, \nu_n) \subset f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \circ d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n)]$$

Observons finalement que l'inclusion (I_n) , composée par $f_{x_{-(n+1)}}^{-1}$, s'écrit

$$(4) \quad f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \circ d_0 f_{\hat{x}}^{-n} [B(0, s_n)] \subset f_{\hat{x}}^{-(n+1)} [B(0, \eta(\hat{x}))]$$

Les inclusions (2), (3) et (4) enchaînées donnent (I_{n+1})

Λ

Preuve du lemme 2 :

D'après la première assertion du lemme 1, l'application $f_{x_{-(n+1)}}$ est inversible sur $B(0, r)$ où $r := r(x_{-(n+1)})$ et son inverse g est à valeurs dans $B(0, \rho)$ où $\rho := \rho(x_{-(n+1)})$ pour tout \hat{x} d'un ensemble \hat{Y} de $\hat{\mu}$ -mesure pleine et tout entier n . Considérons alors le développement de Taylor $g - d_0 g =: \sum_{p \geq 2} Q_p$ où Q_p désigne une application homogène de degré p . Pour tout $u \in B(0, r)$ on a $\|Q_p(u)\| = \|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta} u) e^{-ip\theta} d\theta\| \leq \rho$ et donc

$$\|(g - d_0 g)(u)\| \leq \sum_{p \geq 2} \frac{\|u\|^p}{r^p} \|Q_p(\frac{ru}{\|u\|})\| \leq \rho \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\|u\|}{r}\right)^p$$

Si de plus $u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n} [B(0, \gamma \eta(\hat{x}))]$ alors $\frac{\|u\|}{r} \leq \gamma e^{-n(\lambda_1 - \epsilon)} =: \delta_n$ (cf. Lemme 1, 3.) et donc $\|(g - d_0 g)(u)\| \leq \frac{1}{1 - \delta_1} \rho \delta_n^2$. La première assertion du lemme 2 s'en déduit car $\rho(x_{-(n+1)})$ a un taux de croissance exponentiel nul (cf. Lemme 1, 2.). La seconde assertion découle presque immédiatement de la définition des exposants de Liapounov. **Λ**

Nous chercherons, dans la section suivante, des conditions pour que les transformations linéaires $(d_0 f_x^n)^{-1}$ intervenant dans la définition de la linéarisabilité en $x \in \mathbf{P}^k$ soient assimilables à des homothéties. Cela revient à contrôler le volume et la taille des ellipsoïdes $(d_0 f_x^n)^{-1} [B(0, 1)]$. Le théorème de Briend-Duval, déjà implicitement pour établir le lemme 1, majore le taux de décroissance exponentielle de la taille de ces ellipsoïdes par $-\frac{\text{Log} d}{2}$. Cela signifie que, pour tout $\epsilon > 0$, on a $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \cdot e^{n\epsilon} d^{-\frac{n}{2}}$ pour n assez grand. En reprenant la méthode de Briend-Duval dans le contexte de la proposition 1, nous allons établir une majoration plus précise : $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \cdot d^{-\frac{n}{2}}$. A cet effet, nous introduisons pour tout $\tau > 0$ les sous-ensembles de $\mathcal{B}_n(\rho)$ suivants :

$$\mathcal{LB}_n(\rho, \tau) := \mathcal{B}_n(\rho) \cap \{x \in \mathbf{P}^k / \|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \leq \tau d^{-\frac{n}{2}}\}$$

Sous les hypothèses de la proposition 1, nous allons montrer que :

$$\liminf_n \mu[\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)] \geq \alpha(\rho) - \frac{C}{\tau^2 \rho^2}$$

où $C > 0$ ne dépend que de f et $\alpha :]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$ est la fonction introduite à la proposition 1. Ceci établira le théorème 2.

La preuve est basée sur le principe suivant. Par tout point de $\hat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) := \mathcal{B}_n(\rho) \setminus \mathcal{LB}_n(\rho, \tau)$ passe un disque dont le diamètre est au moins égal à $\tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$ et dont

l'image par f^n reste contenue dans une boule de rayon fixé. Comme $f^{n*}T = d^nT$, il passe donc par tout point de $\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau)$ un grand disque peu chargé par T . Des techniques pluripotentialistes permettent alors de majorer précisément la masse de cet ensemble de points pour la mesure $\mu = T^k$. Nous adoptons la définition suivante :

Définition On dit qu'un disque holomorphe $\sigma : \Delta \rightarrow \mathbf{C}^k$ est de taille α et passe par $z \in \mathbf{C}^k$ si il est de la forme $\sigma(u) = z + \alpha u.v + \beta(u)$ où $\alpha > 0$, v est un vecteur unitaire de \mathbf{C}^k , $\beta(0) = 0$ et $\|\beta\| \leq \frac{\alpha}{1000}$.

Preuve du théorème 2 :

l'ingrédient principal est le théorème suivant dont la preuve sera résumée dans l'appendice.

Théorème (Briend-Duval) Soit $S := dd^c w$ un $(1, 1)$ courant positif fermé de potentiel w continu sur $P(0, R)$ et $E \subset P(0, \frac{R}{2})$. On suppose que par tout $z \in E$ passe un disque holomorphe $\sigma_z : \Delta \rightarrow \mathbf{C}^k$ de taille α et qu'il existe une fonction h_z harmonique telle que $|w \circ \sigma_z - h_z| \leq \epsilon$ sur Δ . Alors il existe une constante $C(w)$ ne dépendant que de w telle que $S^k(E) \leq C(w) \frac{k^2}{\alpha^2} \epsilon$.

En vue d'utiliser ce résultat, nous fixons des systèmes de coordonnées locales sur \mathbf{P}^k . Considérons un recouvrement de \mathbf{P}^k par des ouverts U_1, \dots, U_N centrés en des points m_j et tel que sur chaque U_j nous puissions fixer des déterminations des cartes τ_x dépendant différenciablement de x (cf. Préliminaires). Posons $\tau_j := \tau_{m_j}$ puis, pour $R > 0$ fixé, $V_j := \tau_j(P(0, R))$. Si le recouvrement est assez fin alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $U_j \subset \tau_j(P(0, \frac{R}{2}))$ et $\tau_x(P(0, \frac{R}{2})) \subset V_j$ pour tout $x \in U_j$
- (ii) $\forall x \in U_j, \|\tau_j^{-1} \circ \tau_x - (\tau_j^{-1}(x) + Id)\|_{C^1, \overline{P(0, \frac{R}{2})}} \leq \frac{1}{1000}$
- (iii) $\mu\{x \in U_j \cap \mathcal{B}_n(\rho) / (d_0 f_x^n)^{-1}[B(0, \rho)] \subset P(0, \frac{R}{2})\} = \mu(U_j \cap \mathcal{B}_n(\rho)) - \epsilon_{n,j}$ avec $\lim_n \epsilon_{n,j} = 0$

puis, si R_0 est pris assez petit (R_0 a été introduit au lemme 1) :

- (iv) $\forall x \in \mathbf{P}^k, \exists l \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\tau_x[B(0, R_0)] \subset V_l$

enfin, si v_j désigne un potentiel continu de T sur V_j

- (v) $T = dd^c v_j$ et $|v_j| \leq M$ sur V_j pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.

D'après la proposition 1 on a $\mu(\mathcal{B}_n(\rho)) \geq \alpha(\rho)$ et, comme il s'agit de minorer $\liminf_n \mu[\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)]$, la propriété (iii) montre que l'on peut considérer que :

$$(5) \quad (d_0 f_x^n)^{-1}[B(0, \rho)] \subset P(0, \frac{R}{2}), \quad \forall x \in U_j \cap \mathcal{B}_n(\rho)$$

Rappelons que $\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) := \mathcal{B}_n(\rho) \setminus \mathcal{LB}_n(\rho, \tau)$, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ nous allons établir que :

$$(6) \quad \mu[\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) \cap U_j] \leq C(v_j \circ \tau_j) \frac{Mk^2}{\tau^2 \rho^2}$$

Soit donc $x \in \widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) \cap U_j$ et $V_n(x)$ un vecteur unitaire réalisant $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\|$. On définit un disque affine $\Phi_{n,x} : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbf{C}^k$ de diamètre au moins égal à $\tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$ par

$$\Phi_{n,x}(t) := (d_0 f_x^n)^{-1}[t \rho V_n(x)] =: t \rho v_n(x).$$

Comme $x \in U_j$, (5) et (i) permettent de définir un nouveau disque $\Phi_{j,n,x} : \Delta \rightarrow P(0, R)$ par $\Phi_{j,n,x} := \tau_j^{-1} \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}$. Compte tenu de la propriété (ii), $\Phi_{j,n,x}$ est un disque holomorphe de taille $\alpha := \rho \|v_n(x)\| \geq \tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$ passant par $\tau_j^{-1}(x)$.

Choisissons $l \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\tau_{f^n(x)}[B(0, R_0)] \subset V_l$ (propriété (iv)) alors, comme $x \in \mathcal{B}_n(\rho)$, on a $f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}(\Delta) \subset \tau_{f^n(x)}[B(0, R_0)] \subset V_l$ et donc

$$dd^c(v_l \circ f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}) = (f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x})^* T = (\tau_x \circ \Phi_{n,x})^* f^{n*} T = d^n(\tau_x \circ \Phi_{n,x})^* T.$$

Par ailleurs, puisque $\tau_x \circ \Phi_{n,x}(\Delta) \subset V_j$ (cf. (5) et (i)), on a

$$(\tau_x \circ \Phi_{n,x})^* T = dd^c(v_j \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}) = dd^c(v_j \circ \tau_j \circ \Phi_{j,n,x})$$

Ainsi, $dd^c[v_l \circ f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x} - d^n v_j \circ \tau_j \circ \Phi_{j,n,x}] = 0$. Autrement dit, la fonction entre crochets est harmonique sur Δ et, puisque $|v_l| \leq M$, le potentiel $w := v_j \circ \tau_j$ de $\tau_j^* T =: S$ diffère d'au plus $\frac{M}{d^n}$ d'une fonction harmonique h_x sur le disque $\sigma_x := \Phi_{j,n,x}$ de taille $\alpha \geq \tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$. Dans ces conditions, (6) découle immédiatement du théorème de Briend-Duval. On en déduit l'estimation annoncée avec $C = Mk^2 \Sigma_1^N C(v_j \circ \tau_j)$. Λ

Il est utile de disposer d'une version du théorème 4 où les orbites issues d'un borélien prescrit sont assujetties à récurrence. Cette précision s'obtient facilement grâce au caractère mélangeant de μ et conduit à l'énoncé du théorème 3.

Preuve du théorème 3 :

Posons $\mathcal{LB}_n(\rho, \tau, B) := \mathcal{LB}_n(\rho, \tau) \cap B \cap f^{-n}(B)$ et $\mathcal{LB}(\rho, \tau, B) := \limsup_n \mathcal{LB}_n(\rho, \tau, B)$. Il est clair que si $x \in \mathcal{LB}(\rho_0, \tau_0, B)$ alors il existe une suite extraite $(f^{n_j})_j$ vérifiant les trois assertions du théorème 3. Il suffit donc d'observer que $\mu(\mathcal{LB}_n(\rho, \tau, B)) \geq (1 - 0)\mu(B)^2$ pourvu que $\rho_0, \frac{1}{\tau_0}$ soient assez petits et n assez grand. Or ceci résulte immédiatement du théorème 2 et du caractère mélangeant de μ . Λ

4 Systèmes linéarisables.

Dans cette partie nous commençons par établir des conditions pour que la suite des itérées $(f^n)_n$ d'un système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ soit μ -presque partout linéarisable par des homothéties de rapport $d^{-\frac{n}{2}}$. Nous montrons ensuite que le courant de Green d'un tel système est une forme lisse strictement positive sur un ouvert non vide de \mathbf{P}^k . D'après [1], f est alors un endomorphisme de Lattès.

Dans cette perspective, nous adoptons la définition suivante :

Définition 2 On dit que le système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ est \sqrt{d} -linéarisable si pour μ -presque tout $x \in \mathbf{P}^k$ il existe $\nu(x) > 0$ ainsi qu'une suite $[f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d^{-\frac{n_j}{2}} Id)]_j$ qui converge uniformément vers une limite injective sur $B(0, \nu(x))$.

A la lumière du théorème 3, ceci revient à exiger que les ellipsoïdes $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}[B(0, 1)]$ soient assimilables à des boules euclidiennes de rayon $d^{-\frac{n_j}{2}}$. Or, la taille de ces ellipsoïdes étant au plus de l'ordre de $d^{-\frac{n_j}{2}}$, il s'agit en fait d'en contrôler le volume. Nous introduisons donc, pour tout $0 < \nu < 1$, les ensembles suivants où $J_0 f_x^n$ désigne le Jacobien complexe de f_x^n en 0 :

$$\mathcal{V}_n(\nu) := \{x \in \mathbf{P}^k / \nu^2 d^{kn} \leq |J_0 f_x^n|^2 \leq \frac{1}{\nu^2} d^{kn}\}$$

En estimant la masse des $\mathcal{V}_n(\nu)$, nous caractérisons la linéarisabilité d'un système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ par l'absence de partie singulière dans la mesure μ :

Proposition 3 Pour un système $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) μ n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue $m := \omega^k$
- 2) μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $m := \omega^k$
- 3) i) $\exists \beta :]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$ telle que $\lim_{\nu \rightarrow 0} \beta(\nu) = 1$ et $\liminf_n \mu[\mathcal{V}_n(\nu)] \geq \beta(\nu)$
ii) les exposants du système sont tous égaux à $\frac{\text{Log} d}{2}$
- 4) Le système est \sqrt{d} -linéarisable.

Preuve de la proposition 3 :

1) \Rightarrow 2). Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ . On a $\mu = f_*\mu = f_*\mu_a + f_*\mu_s$. Or, f étant un revêtement ramifié, les images directes ou réciproques par f d'ensembles m -négligeables sont encore m -négligeables. Il résulte alors facilement des définitions que $f_*\mu_a \ll m$ et $f_*\mu_s \perp m$. Donc, la décomposition de Lebesgue de μ étant unique, les mesures μ_a et μ_s sont invariantes : $f_*\mu_a = \mu_a$, $f_*\mu_s = \mu_s$. Etant ergodique, la mesure μ est extrémale parmi les mesures de probabilité invariantes par f . Donc, si $m_a := \mu_a(\mathbf{P}^k) > 0$ alors $m_s := \mu_s(\mathbf{P}^k) = 1 - m_a$ et l'identité $\mu = m_a \frac{\mu_a}{m_a} + (1 - m_a) \frac{\mu_s}{m_s}$ force l'égalité $\mu = \mu_a$.

2) \Rightarrow 3)i). Puisque $\mu \ll m$, il existe une fonction φ m -intégrable sur \mathbf{P}^k telle que $\mu = \varphi m$. De plus, par le théorème de Lusin, on trouve pour tout $n \in \mathbf{N}$ des fonctions continues g_n, h_n et des boréliens $C_n(\varphi), C_n(\varphi \circ f^n)$ tels que :

$$\varphi = g_n \text{ sur } C_n(\varphi) \text{ et } \mu[C_n(\varphi)] \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\varphi \circ f^n = h_n \text{ sur } C_n(\varphi \circ f^n) \text{ et } \mu[C_n(\varphi \circ f^n)] \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Pour tout $0 < \nu < 1$ définissons un borélien A_ν par $A_\nu := \{x \in \mathbf{P}^k / \nu < \varphi < \frac{1}{\nu}\}$ et posons $\beta(\nu) := \mu(A_\nu)^2$. Soit alors $Z_{n,\nu} := [f^{-n}(A_\nu) \cap A_\nu] \cap [C_n(\varphi) \cap C_n(\varphi \circ f^n)] \cap Y^c$

où $Y := \cup_p \text{Crit } f^p$ et $Z_{n,\nu}^{\text{Leb}}$ l'ensemble des points de Lebesgue de $Z_{n,\nu}$ c'est à dire :

$$Z_{n,\nu}^{\text{Leb}} := \{x \in Z_{n,\nu} / \lim_{s \rightarrow 0} \frac{m[B(x, s) \cap Z_{n,\nu}]}{m[B(x, s)]} = 1\}$$

Puisque $\mu \ll m$ on a $\mu(Z_{n,\nu}^{\text{Leb}}) = \mu(Z_{n,\nu})$. Alors, compte tenu du caractère mélangeant de μ et du fait que $\mu(Y) = 0$, on voit que pour n assez grand on a :

$$\mu(Z_{n,\nu}^{\text{Leb}}) \geq [\beta(\nu) - 0] - \frac{2}{n}$$

Il suffit donc de vérifier que $Z_{n,\nu}^{\text{Leb}} \subset \mathcal{V}_n(\nu)$. Fixons $x \in Z_{n,\nu}^{\text{Leb}}$. Puisque $x \notin \text{Crit } f^n$, il existe $s_0 > 0$ tel que f^n soit injective sur $B(x, s_0)$. En outre, x étant un point de Lebesgue de $Z_{n,\nu}$, on peut diminuer s_0 de façon à ce que $m[B(x, s) \cap Z_{n,\nu}] \geq \frac{1}{2}m[B(x, s)] > 0$ pour tout $0 < s < s_0$. Par changement de variables, d'abord par rapport à $\mu = \varphi m$ qui est de Jacobien constant égal à d^k puis par rapport à $m = \omega^k$, on obtient :

$$d^{kn} \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} \varphi m = \int_{f^n[B(x,s) \cap Z_{n,\nu}]} \varphi m = \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} \varphi \circ f^n(f^{n*}\omega^k)$$

Or, puisque $C_n(\varphi) \cap C_n(\varphi \circ f^n)$ contient $Z_{n,\nu}$, on peut remplacer φ par g_n et $\varphi \circ f^n$ par h_n dans ces intégrales. Après normalisation par $m(s, n, \nu) := m[B(x, s) \cap Z_{n,\nu}]$ cela donne :

$$\frac{d^{kn}}{m(s, n, \nu)} \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} g_n m = \frac{1}{m(s, n, \nu)} \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} h_n(f^{n*}\omega^k)$$

Faisons tendre s vers 0, comme les fonctions g_n, h_n sont continues et $(f^{n*}\omega^k)_x = |J_0 f_x^n|^2(\omega^k)_x$, on obtient :

$$d^{kn} \varphi(x) = d^{kn} g_n(x) = h_n(x) |J_0 f_x^n|^2 = \varphi \circ f^n(x) |J_0 f_x^n|^2$$

c'est à dire $\frac{|J_0 f_x^n|^2}{d^{kn}} = \frac{\varphi(x)}{\varphi \circ f^n(x)}$ ce qui, puisque x et $f^n(x)$ appartiennent à A_ν , montre que $x \in \mathcal{V}_n(\nu)$.

3)i) \Rightarrow 3)ii). On sait que $\lim_n \frac{1}{n} \text{Log} |J_0 f_x^n|^2 = 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i$ pour μ -presque tout x . Par ailleurs, si $x \in \mathcal{V}(\nu) := \limsup_n \mathcal{V}_n(\nu)$ on a $\lim_n \frac{1}{n} \text{Log} |J_0 f_x^n|^2 = k \text{Log} d$. Or, d'après 3)i), $\mu[\mathcal{V}(\nu)] \geq \beta(\nu) \geq \frac{1}{2}$ pourvu que ν soit assez petit. On a donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i = k \frac{\text{Log} d}{2}$, d'où 3)ii) puisque $\lambda_i \geq \frac{\text{Log} d}{2}$.

3) \Rightarrow 4). On peut, compte tenu de 3)ii), appliquer le théorème 2. Nous en reprenons les notations et posons $\mathcal{LVB}_n(\rho, \tau, \nu) := \mathcal{LB}_n(\rho, \tau) \cap \mathcal{V}_n(\nu)$, $\mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu) := \limsup_n \mathcal{LVB}_n(\rho, \tau, \nu)$. D'après 3)i) et le théorème 2, $\mu[\mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu)]$ est arbitrairement proche de 1 pourvu que ρ, ν soient assez petits et τ assez grand. Il suffit donc de montrer que $(f^n)_n$ est

linéarisable par $\Lambda_n := (\sqrt{d})^{-n} Id$ lorsque $x \in \mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu)$. Soit donc $(n_j)_j$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $x \in \mathcal{LVB}_{n_j}(\rho, \tau, \nu)$ pour tout j . Puisque $\mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu) \subset \mathcal{B}(\rho)$ on a $f_x^{n_j} \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}(B(0, \rho)) \subset B(0, R_0)$ pour tout j et il nous reste donc à voir que $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$ est équivalente à Λ_{n_j} . A cet effet, notons $\delta_{j,1} \leq \dots \leq \delta_{j,k}$ les valeurs singulières de $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$. On a $\delta_{j,k} \leq \tau(\sqrt{d})^{-n_j}$ car $x \in \mathcal{LB}_{n_j}(\rho, \tau)$ et $(\delta_{j,1} \dots \delta_{j,k})^2 = |J_0 f_x^{n_j}|^{-2} \geq \nu^2(d)^{-kn_j}$ car $x \in \mathcal{V}_{n_j}(\nu)$. On en déduit l'équivalence voulue : $\nu(\tau)^{1-k}(\sqrt{d})^{-n_j} \leq \delta_{j,1} \leq \dots \leq \delta_{j,k} \leq \tau(\sqrt{d})^{-n_j}$.

4) \Rightarrow 1). Soit $x \in \mathbf{P}^k$ un point où $(f^n)_n$ est linéarisable par $\Lambda_n := (\sqrt{d})^{-n} Id$. Cela signifie qu'il existe $\rho > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_j$ tels que $f_x^{n_j} \circ \Lambda_{n_j} : B(0, \rho) \rightarrow B(0, R_0)$ soit une suite d'injections. Notons $B_{n_j} := B(0, \rho d^{-\frac{n_j}{2}})$ alors, puisque $f^* \mu = d^k \mu$ on a $\mu[f^{n_j} \circ \tau_x(B_{n_j})] = d^{kn_j} \mu[\tau_x(B_{n_j})]$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu[\tau_x(B(0, r))]}{m[\tau_x(B(0, r))]} &\leq \liminf_j \frac{\mu[\tau_x(B_{n_j})]}{m[\tau_x(B_{n_j})]} \cdot \liminf_j \frac{\mu[\tau_x(B_{n_j})]}{d^{-kn_j}} \\ &= \liminf_j \mu[f^{n_j} \circ \tau_x(B_{n_j})] \leq 1 \end{aligned}$$

et donc $\mu \ll m$, puisque ceci est vrai pour μ -presque tout x . Λ

Remarque 1 Comme nous l'avons fait pour établir le théorème 3, une légère modification de l'argumentation dans 3) \Rightarrow 4) permet de choisir la sous-suite $[f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d^{-\frac{n_j}{2}} Id)]_j$ de façon à ce que $f^{n_j}(x)$ ne s'échappe pas d'un borélien de μ -mesure strictement positive prescrit.

La fin de cette section est dévolue à la preuve du théorème 1 proprement dite. Au vu de la proposition 3, il s'agit de caractériser les systèmes $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ qui sont \sqrt{d} -linéarisables. Comme le courant de Green T satisfait les équations fonctionnelles $f^{n*}T = d^n T$, nous verrons que pour de tels systèmes le procédé de linéarisation peut fournir des coordonnées locales dans lesquelles T est une forme lisse définie positive. L'endomorphisme f est alors un exemple de Lattès en vertu du résultat de [1].

Preuve du théorème 1 :

Le procédé de linéarisation permet d'établir le lemme suivant :

Lemme 3 Soit $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ un système \sqrt{d} -linéarisable et S un $(1, 1)$ courant positif sur \mathbf{P}^k tel que $f^*S = dS$ (S n'est pas nécessairement fermé).

1) Si $S = S_a$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{P}^k$ chargé par μ alors il existe une boule $B(0, r) \subset \mathbf{C}^k$ et un biholomorphisme $\Phi : B(0, r) \rightarrow \Omega' \subset \Omega$ tels que Φ^*S soit une forme différentielle à coefficients constants et $\mu(\Omega') > 0$.

2) Soit Ω un ouvert de \mathbf{P}^k chargé par μ et sur lequel S dérive d'un potentiel p.s.h continu v ($S = dd^c v$). Si S_a est identiquement nul sur Ω alors $\mu(\Omega \cap \text{Supp } S) = 0$

Soit Ω un ouvert de \mathbf{P}^k tel que $\mu(\Omega) > 0$. Considérons la décomposition $T = T_a + T_s$. La première assertion du lemme 3 appliquée à T_a permet de supposer que $T_a|_\Omega$ est donné par une forme H à coefficients constants dans de bonnes coordonnées. En particulier cela montre que T_a possède un potentiel continu sur Ω et il en va donc de même pour $T_s = T - T_a$. Ceci permet, sur Ω , d'exprimer μ sous la forme d'une somme de mesures positives obtenues comme produits extérieurs de T_a et T_s :

$$(7) \quad \mu = T^k = (T_a + T_s)^k = T_a^k + \sum_{j=1}^k C_k^j T_s^j \wedge T_a^{k-j}$$

Puisque $(T_s)_a \equiv 0$, la seconde assertion du lemme 3 montre que μ ne charge pas $\Omega \cap \text{Supp } T_s$ et donc, au vu de (7), la mesure T_a^k n'est pas identiquement nulle sur Ω . Autrement dit la forme H n'est pas dégénérée. Par ailleurs, chaque terme du second membre de (7) doit, en tant que mesure positive, être absolument continue. En particulier, $(T_s \wedge T_a^{k-1})_s$ est identiquement nul sur Ω . Or, puisque H est strictement positive, $(T_s \wedge T_a^{k-1})$ est équivalente à la mesure trace σ_{T_s} de T_s et donc σ_{T_s} est nulle sur Ω . Ainsi, $T_s|_\Omega \equiv 0$ et T coïncide sur Ω avec une forme lisse définie positive. Λ

Preuve du lemme 3 :

1) Quitte à diminuer Ω on peut supposer que τ_x^{-1} soit défini sur Ω pour tout $x \in \Omega$. Choisissons $x_0 \in \Omega$. Alors, puisque $S \equiv S_a$, on peut écrire $\tau_{x_0}^* S$ sous la forme

$$\tau_{x_0}^* S = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q}(z) dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

où les $h_{p,q}$ sont des fonctions L_{loc}^1 . Soit \mathcal{C} l'ensemble des points de $\tau_{x_0}^{-1}(\Omega)$ où chacune des fonctions $h_{p,q}$ est continue en mesure et \mathcal{R} l'ensemble des points de $(\Omega \cap \text{Supp } \mu)$ où $(f^n)_n$ est linéarisable par des homothéties $\Lambda_n := d^{-\frac{n}{2}} Id$. Comme $\mu \ll m$, on voit grâce à la proposition 3 que $\mu[\tau_{x_0}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{R}] > 0$. Soit alors $x_1 \in \tau_{x_0}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{R}$ et $\psi := \tau_{x_0}^{-1} \circ \tau_{x_1}$. Comme $\tau_{x_1}^* S = \psi^* \tau_{x_0}^* S = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q} \circ \psi d\psi_p \wedge d\bar{\psi}_q$ on voit que, quitte à remplacer x_0 par x_1 , on peut supposer que $0 \in \mathcal{C}$ et $x_0 \in \mathcal{R}$.

Soit donc $\Phi_n := f^n \circ \tau_{x_0} \circ \Lambda_n$. Modulo extraction, Φ_n converge vers un biholomorphisme $\Phi : B(0, \nu) \rightarrow \Omega'$ et l'on peut supposer que $\Phi_n(0) = f^n(x_0)$ reste dans $V_{x_0} \cap \text{Supp } \mu$ où V_{x_0} est un voisinage arbitrairement petit de x_0 (cf. Remarque 1). Ainsi $\Phi(0) \in \Omega \cap \text{Supp } \mu$ et, quitte à diminuer ν , on a $\Omega' \subset \Omega$ et $\mu(\Omega') > 0$. D'après l'invariance de S on a :

$$\Phi_n^* S = \Lambda_n^* \tau_{x_0}^* f^{n*} S = d^n \Lambda_n^* [\tau_{x_0}^* S] = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q} \circ \Lambda_n dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

d'où, en passant à la limite, $\Phi^* S = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q}(0) dz_p \wedge d\bar{z}_q =: H$.

2) Quitte à diminuer Ω on peut supposer que $S = dd^c v$ sur un voisinage V de $\overline{\Omega}$. Supposons que $\mu(\Omega \cap \text{Supp } S) > 0$. Soit Λ_n l'homothétie de rapport $d^{-\frac{n}{2}}$. D'après la proposition 3 et la remarque 1, il existe $\mathcal{R} \subset (\Omega \cap \text{Supp } S)$ tel que $\mu(\mathcal{R}) > 0$ et, pour tout point $x_0 \in \mathcal{R}$, il existe une suite $\Phi_{n_j} := f^{n_j} \circ \tau_{x_0} \circ \Lambda_{n_j}$ qui converge uniformément sur $B(0, \nu(x_0))$ vers un biholomorphisme Φ telle que $f^{n_j}(x_0) \in \mathcal{R}$ pour tout j .

Nous allons montrer que (σ_S) possède une dérivée de Radon-Nykodym strictement positive en tout point de \mathcal{R} . Comme $\mu(\mathcal{R}) > 0$ et $\mu \ll m$, cela montrera que σ_{S_a} (qui est égale à $(\sigma_S)_a$) et donc S_a ne sont pas nuls sur Ω .

Comme $\Phi(0) \in \overline{\mathcal{R}} \subset \overline{\Omega}$ on peut diminuer ν de façon à ce que $\Phi_{n_j}(B(0, \nu))$ et $\Phi(B(0, \nu))$ soient contenus dans V . Soit $S_0 := \tau_{x_0}^* S$ et $\omega_0 := \frac{i}{2} dd^c ||z||^2$. Il suffit de contrôler la dérivée de $(\sigma_{S_0})_a$ à l'origine, c'est à dire d'établir que

$$\limsup_n d^{kn} \int_{B(0, d^{-\frac{n}{2}} \nu)} S_0 \wedge \omega_0^{k-1} > 0.$$

Or, puisque par hypothèse $f^* S = dS$, il vient

$$\begin{aligned} d^{kn_j} \int_{B(0, d^{-\frac{n_j}{2}} \nu)} S_0 \wedge \omega_0^{k-1} &= d^{(k-1)n_j} \int_{\Lambda_{n_j}[B(0, \nu)]} \tau_{x_0}^* f^{n_j} S \wedge \omega_0^{k-1} = \\ d^{(k-1)n_j} \int_{B(0, \nu)} \Phi_{n_j}^* S \wedge (\Lambda_{n_j}^* \omega_0)^{k-1} &= \int_{B(0, \nu)} \Phi_{n_j}^* S \wedge \omega_0^{k-1} = \int_{B(0, \nu)} dd^c(v \circ \Phi_{n_j}) \wedge \omega_0^{k-1} \end{aligned}$$

d'où par le théorème de convergence dominée :

$$\limsup_j d^{kn_j} \int_{B(0, d^{-\frac{n_j}{2}} \nu)} S_0 \wedge \omega_0^{k-1} \geq \int_{B(0, \nu)} dd^c(v \circ \Phi) \wedge \omega_0^{k-1} = \int_{B(0, \nu)} \Phi^* S \wedge \omega_0^{k-1}.$$

Ceci achève la preuve car $\Phi(0) \in \overline{\mathcal{R}} \subset \text{Supp } S$ entraîne $\int_{B(0, \nu)} \Phi^* S \wedge \omega_0^{k-1} = \sigma_{\Phi^* S}[B(0, \nu)] > 0$. Λ

APPENDICE

• Pour la commodité du lecteur, nous résumons la preuve du théorème de Briend-Duval que nous avons utilisé dans la section 3.

Théorème (Briend-Duval) *Soit $S := dd^c w$ un $(1, 1)$ courant positif fermé de potentiel w continu sur $P(0, R)$ et $E \subset P(0, \frac{R}{2})$. On suppose que par tout $z \in E$ passe un disque holomorphe $\sigma_z : \Delta \rightarrow \mathbf{C}^k$ de taille $\alpha > 0$, c'est à dire de la forme $\sigma(u) = z + \alpha u \cdot v + \beta(u)$ où v est un vecteur unitaire de \mathbf{C}^k , $\beta(0) = 0$ et $||\beta|| \leq \frac{\alpha}{1000}$, tel qu'il existe une fonction h_z harmonique vérifiant $|w \circ \sigma_z - h_z| \leq \epsilon$ sur Δ . Alors il existe une constante $C(w)$ ne dépendant que de w telle que $S^k(E) \leq C(w) \frac{k^2}{\alpha^2} \epsilon$.*

Soit p_l la projection sur le l -ième axe de \mathbf{C}^k et $E_l := \{z \in E / \|p_l(v_z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\}$, on a $E = \cup_{l=1,k} E_l$. Pour fixer les idées estimons $S^k(E_1)$. On recouvre le polydisque $P(0, \frac{1}{2}R)$ par environ $N := \frac{1}{4} \frac{100k}{\alpha^2}$ ellipsoïdes contenus dans $P(0, R)$ et de la forme $z + \mathcal{D}[B(0, R)]$ où $\mathcal{D}(z_1, z') = (\frac{\alpha}{10\sqrt{k}}z_1, z')$.

Soit \mathcal{E} l'un de ces ellipsoïdes. Puisque \mathcal{E} est strictement pseudoconvexe, il existe une fonction \hat{w} *p.s.h* maximale sur \mathcal{E} , continue sur $\bar{\mathcal{E}}$ et coïncidant avec w sur $b\mathcal{E}$. Si $z \in \mathcal{E} \cap E_1$, on voit facilement que le disque $\sigma_z(\Delta)$ traverse \mathcal{E} au sens où la composante connexe de $\sigma_z^{-1}(\mathcal{E} \cap \sigma_z(\Delta))$ passant par l'origine (C_0) est relativement compacte dans Δ . Un argument de principe du maximum montre que C_0 est simplement connexe. En exhaustant C_0 par des domaines à bord suffisamment régulier on peut paramétrer des disques holomorphes contenus dans \mathcal{E} et dont le bord est arbitrairement proche de $b\mathcal{E}$. Plus précisément, $\epsilon > 0$ étant fixé, on trouve une transformation conforme et continue au bord $\psi : \bar{\Delta} \rightarrow \psi(\bar{\Delta}) \subset \mathcal{E}$ telle que $\psi(0) = 0$ et $|\hat{w} - w| \leq \epsilon$ sur $\sigma_z \circ \psi(b\Delta)$. Posons $\tilde{\sigma}_z := \sigma_z \circ \psi$, soit \tilde{h} la fonction harmonique sur Δ continue sur $\bar{\Delta}$ et coïncidant avec $w \circ \tilde{\sigma}_z$ sur $b\Delta$. On a alors :

$$(8) \quad w(z) \leq \hat{w}(z) \leq \tilde{h}(0) + \epsilon$$

la première inégalité découlant de la maximalité de \hat{w} sur \mathcal{E} et la seconde du principe du maximum appliqué à $\hat{w} \circ \tilde{\sigma}_z - \tilde{h}$ qui coïncide avec $\hat{w} \circ \tilde{\sigma}_z - w \circ \tilde{\sigma}_z$ sur $b\Delta$.

Par hypothèse on a $h_z \circ \psi - \epsilon \leq w \circ \sigma_z \circ \psi = w \circ \tilde{\sigma}_z \leq h_z \circ \psi + \epsilon$ sur $\bar{\Delta}$. On a donc aussi $h_z \circ \psi - \epsilon \leq \tilde{h} \leq h_z \circ \psi + \epsilon$ et il s'ensuit que :

$$(9) \quad |w(z) - \tilde{h}(0)| \leq 2\epsilon.$$

Les inégalités (8) et (9) montrent que :

$$\mathcal{E} \cap E_1 \subset \mathcal{E}(w, \epsilon) := \{z \in \mathcal{E} / 0 \leq \hat{w}(z) - w(z) \leq 3\epsilon\}.$$

La majoration annoncée résulte alors immédiatement de l'estimation suivante qui est au coeur de la démonstration de Briend-Duval et pour laquelle nous renvoyons à [3] ou [16] page 180, Théorème A.10.2 :

Il existe une constante $C(w) > 0$ telle que $(dd^c w)^k[\mathcal{E}(w, \epsilon)] \leq C(w)\epsilon$. Λ

• Nous reprenons, *mutatis mutandis*, des arguments développés par Binder et De-Marco [2] dans le cas d'endomorphismes polynomiaux de \mathbf{C}^k pour justifier le résultat suivant :

Théorème *Soit $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ un système dynamique, d'exposants $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$. La dimension de Hausdorff de μ vérifie : $\text{Dim}_H(\mu) \leq 2(k-1) + \frac{\log d}{\lambda_k}$.*

Rappelons que la dimension est définie comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des boréliens de mesure totale. Ce résultat montre que si la dimension de μ est égale à $2k$, alors tous les exposants de μ sont minimaux, égaux à $\log d/2$.

Esquissons maintenant la démonstration : il s'agit d'exhiber pour tout $\epsilon > 0$ un borélien Y de mesure totale vérifiant :

$$(10) \quad \dim_H(Y) \leq 2(k-1) + \frac{\log d}{\lambda_k} + \frac{2k}{\lambda_k} \cdot \epsilon$$

Soit \widehat{A} l'ensemble des points $\hat{x} = (x_{-n})_{n \geq 0}$ de l'extension naturelle $\widehat{\mathbf{P}^k}$ vérifiant pour tout $n \geq 0$:

$$f_{\hat{x}}^{-n}[B(x_0, r_0)] \supset B(x_{-n}, \frac{r_0}{\kappa_0} \cdot e^{-n(\lambda_k + \epsilon)}) \quad \text{et} \quad \text{Vol}(f_{\hat{x}}^{-n}[B(x_0, r_0)]) \leq \kappa_0 \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}$$

On montre que $\hat{\mu}(\widehat{A}) > 0$ pour κ_0 assez grand et r_0 assez petit (cf. [2], lemme 2).

Soit $\widehat{A}_n := \widehat{f}^{-n} \widehat{A}$. La mesure $\hat{\mu}$ étant ergodique, le théorème de Birkhoff entraîne que $\widehat{Y} := \limsup_n \widehat{A}_n$ est de mesure totale.

On pose alors $Y := \pi_0(\widehat{Y})$ et $A_n := \pi_0(\widehat{A}_n)$, de sorte que Y est aussi de mesure totale et est contenu dans $\limsup_n A_n$. Estimer la dimension de Hausdorff de Y revient à estimer celle des ensembles A_n , pour n assez grand. Par définition de \widehat{A} , tout point y de A_n vérifie :

1. f^n admet une branche inverse g sur $B(f^n(y), r_0)$, telle que $g(f^n(y)) = y$.
2. $\mathcal{P} := g[B(f^n(y), r_0)] \supset B(y, \frac{r_0}{\kappa_0} \cdot e^{-n(\lambda_k + \epsilon)})$
3. $\text{Vol}(\mathcal{P}) \leq \kappa_0 \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}$

Il découle de ces propriétés que A_n est recouvert par une famille $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$ d'ouverts du type \mathcal{A} dont le cardinal est de l'ordre de d^{kn} . Il suffit pour le voir de recouvrir $\overline{A_0}$ par un nombre fini de boules $B(x_{i_0}, \frac{1}{4}r_0)$ puis d'observer que tout $y \in A_n$ est dans $g[B(x_{i_0}, \frac{1}{2}r_0)]$ dès lors que $f^n(y) \in B(x_{i_0}, \frac{1}{4}r_0)$. D'après le point 3, le volume de la réunion des \mathcal{P}_i n'excède pas $d^{kn} \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}$.

Considérons à présent un recouvrement $(\mathcal{M}_j)_{j \in J}$ de A_n par des sous-ensembles de diamètre $\frac{r_0}{100\kappa_0} \cdot e^{-n(\lambda_k + \epsilon)}$ provenant d'un maillage de \mathbf{P}^k . D'après le point 2, un sous-ensemble \mathcal{M}_j intersectant A_n est nécessairement contenu dans $\cup_{i \in I} \mathcal{P}_i$. On a donc :

$$\text{Card}(J) \leq \frac{\text{Vol}(\cup_{i \in I} \mathcal{P}_i)}{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)} \cdot \frac{d^{kn} \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}}{(e^{-n(\lambda_k + \epsilon)})^{2k}}$$

En minorant les exposants $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ par $\log d/2$, on obtient :

$$\text{Card}(J) \cdot d^n \cdot e^{n([2(k-1)\lambda_k] + (2k+1)\epsilon)}$$

Il s'ensuit que la mesure de Hausdorff de A_n de dimension $\alpha_\epsilon = 2(k-1) + \log d/\lambda_k + 2k\epsilon/\lambda_k$ est minorée $e^{-n\epsilon}$, pour n assez grand. La α_ϵ -mesure de Hausdorff de $Y \subset \limsup_n A_n$ est donc finie pour tout $\epsilon > 0$, ce qui prouve le théorème.

Références

- [1] F. Berteloot, J.J. Loeb, *Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de \mathbf{P}^k* , Bull. Soc. Math. Fr., **129** (2001), no. 2, 175-188.
- [2] I. Binder, L. DeMarco, *Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of \mathbf{C}^n* , Int. Math. res. Not., **11** (2003), 613-625.
- [3] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de \mathbf{P}^k* , Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.
- [4] J.Y. Briend, J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de \mathbf{P}^k* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **93** (2001), 145-159.
- [5] T.C. Dinh, N. Sibony, *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de \mathbf{P}^k* , Math. Ann., **324** (2002), no. 1, 33-70.
- [6] C. Dupont, *Propriétés extrémales et caractéristiques des exemples de Lattès*, Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, (2002).
- [7] C. Dupont, *Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques.*, Manuscripta Mathematica, (to appear).
- [8] C. Dupont, *Endomorphismes holomorphes de \mathbf{P}^k vérifiant la formule de Pesin*, preprint.
- [9] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions*, in Complex potential theory (Montréal, PQ, 1993), NATO ASI series Math. and Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ. (1994), 131-186.
- [10] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions II*, Ann. of Math. Studies, **137**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1995), 135-187.
- [11] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics*, Publ. Mat., **45** (2001), no. 2, 529-547.
- [12] J.H. Hubbard, P. Papadopol, *Superattractive fixed points in \mathbf{C}^n* , Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), no. 1, 321-365.
- [13] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measure on an interval*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 77-93.
- [14] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.
- [15] V. Mayer, *Comparing measures and invariant line fields*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **22** (2002), no. 2, 555-570.
- [16] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de \mathbf{P}^k* , in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses No 8, SMF et EDP Sciences, 1999.
- [17] A. Zdunik, *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps*, Invent. Math., **99** (1990), no. 3, 627-649.

F. Berteloot
Université P. Sabatier, Toulouse III
Lab. Emile Picard, Bat. 1R2, UMR 5580
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex France
berteloo@picard.ups-tlse.fr

C. Dupont
Université Paris-Sud
Mathématique, Bat. 425, UMR 8628
91405 Orsay, France
christophe.dupont@math.u-psud.fr